Computergrafik

Universität Osnabrück, Henning Wenke, 2012-04-24

Noch Kapitel II: Mathematische Grundlagen

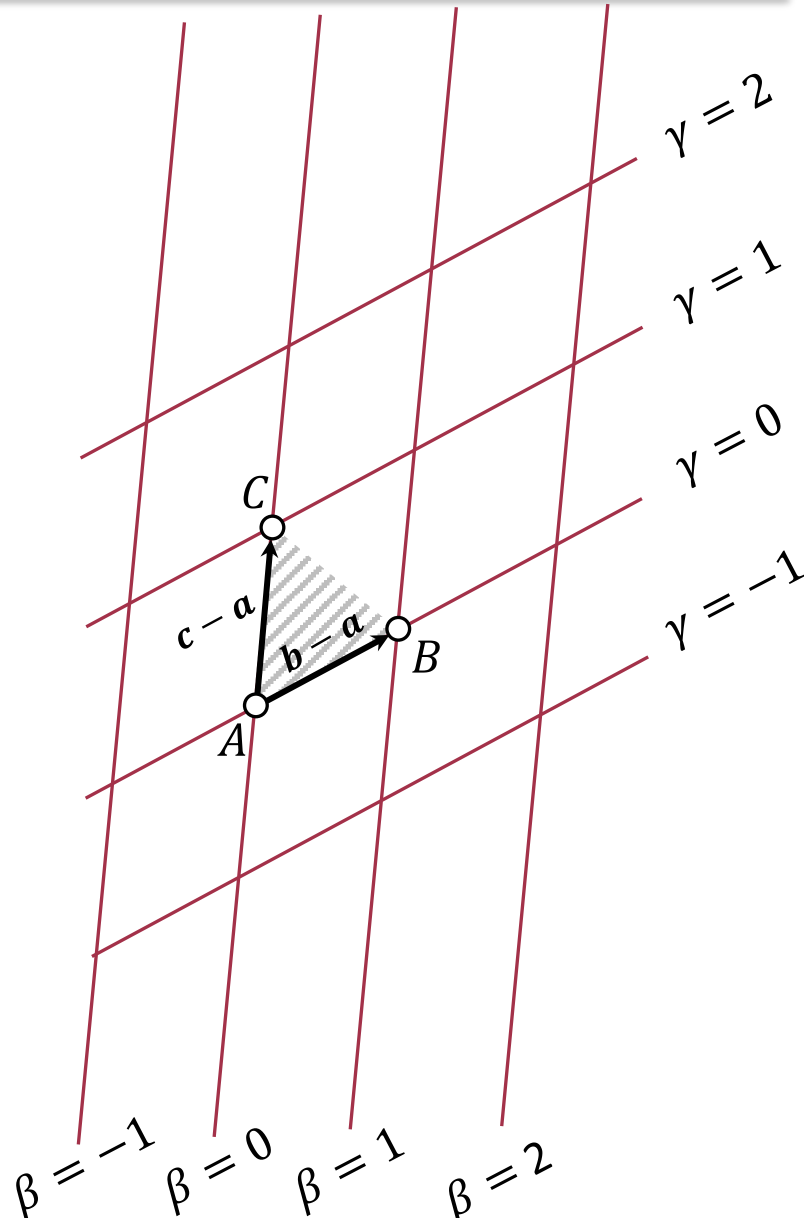
2.3

Dreiecke

2D Baryzentrische Koordinaten I

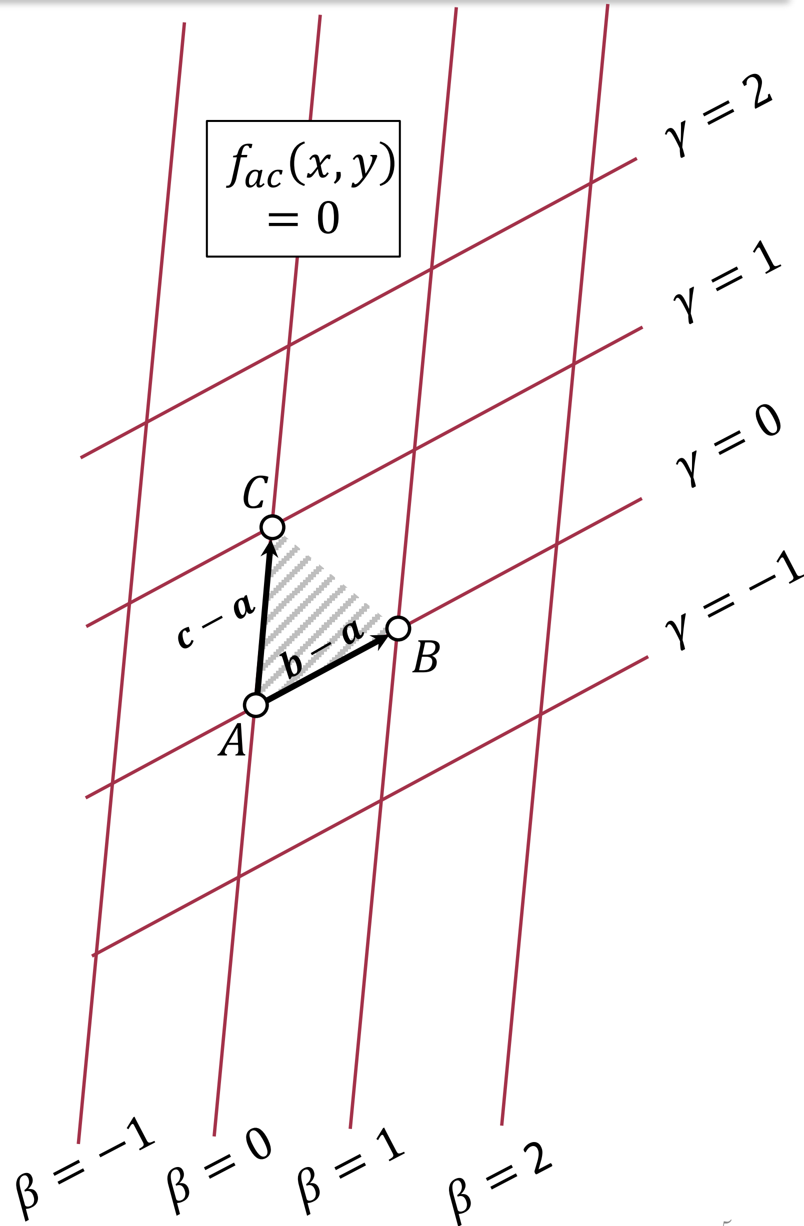
- Definiert durch Eckpunkt A als Ursprung und 2 Vektoren des Dreiecks als Basisvektoren
- Dann gilt für jeden Punkt $\boldsymbol{p}$ in diesem KS mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$
  - $\boldsymbol{p}(\alpha, \beta) = \boldsymbol{a} + \beta(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) + \gamma(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a})$
- Umformen mit $\alpha = 1 - \beta - \gamma$ ergibt die BK des Dreiecks zu:

$\boldsymbol{p}(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}$, mit:
$\alpha + \beta + \gamma = 1$



2D Baryzentrische Koordinaten II

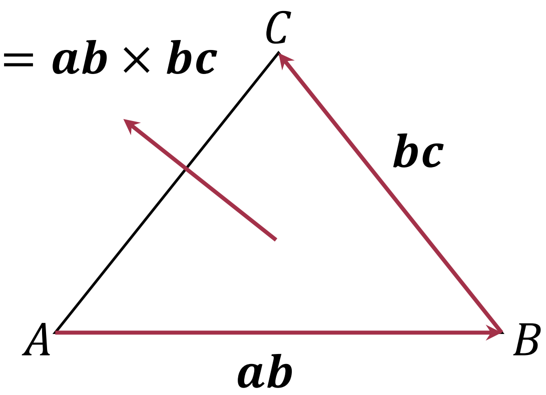
- $\boldsymbol{p}(\alpha,\beta,\gamma) = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}$
- Gesucht: β
  - β ist Distanz zur Geraden durch $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{c}$
  - $k \cdot f_{ac}(x,y) = \beta$
  - β im Punkt $\boldsymbol{b}$ ist 1
  - $k \cdot f_{ac}(x_b,y_b) = 1 \Longrightarrow k = 1/f_{ac}(x_b,y_b)$
  - Einsetzen: $\beta = \frac{f_{ac}(x,y)}{f_{ac}(x_b,y_b)}$
- γ: Analog
- $\alpha = 1 - \beta - \gamma$
- Anwendungsbeispiel (Übung):
  - Gegeben: Dreieck ABC
  - Punkte D, E, F enthalten?

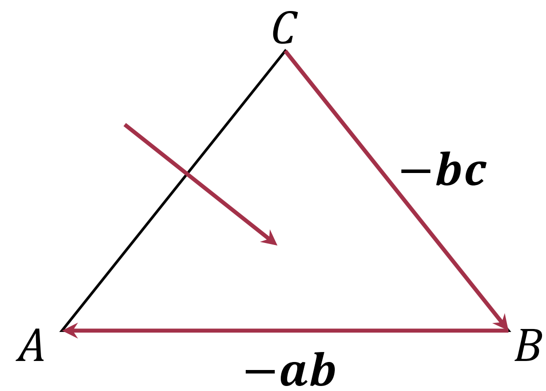


Vorder- und Rückseite

- Gegeben: Betrachter schaut auf Dreieck und sieht die „Vorderseite“
- Normale aus Kreuzprodukt der Kantenvektoren in Abhängigkeit des Drehsinns
  - Gegen Urzeigersinn (CCW): Normale zeigt zum Betrachter
  - Im Urzeigersinn (CW): Normale zeigt vom Betrachter weg
- Definiere positiven Drehsinn: CCW
- Dann: Zeigt Normale eines Dreiecks im Raum zum Betrachter, so ist dieses die Vorderseite

$$\boldsymbol{n}_{CCW} = \boldsymbol{ab} \times \boldsymbol{bc}$$





$$\begin{aligned} \boldsymbol{n}_{CW} &= -\boldsymbol{bc} \times -\boldsymbol{ab} \\ &= \boldsymbol{bc} \times \boldsymbol{ab} \\ &= -(\boldsymbol{ab} \times \boldsymbol{bc}) \\ &= -\boldsymbol{n}_{CCW} \end{aligned}$$

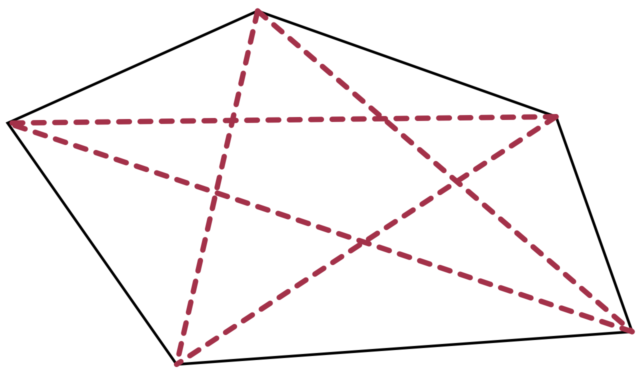
$(rechtsh. KS.)$

2.4

Polygone

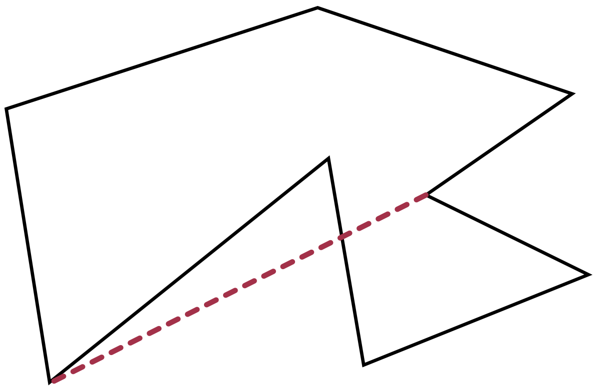
Polygon

Konvex



➢ Alle Verbindungslinien der Eckpunkte innerhalb des Polygons

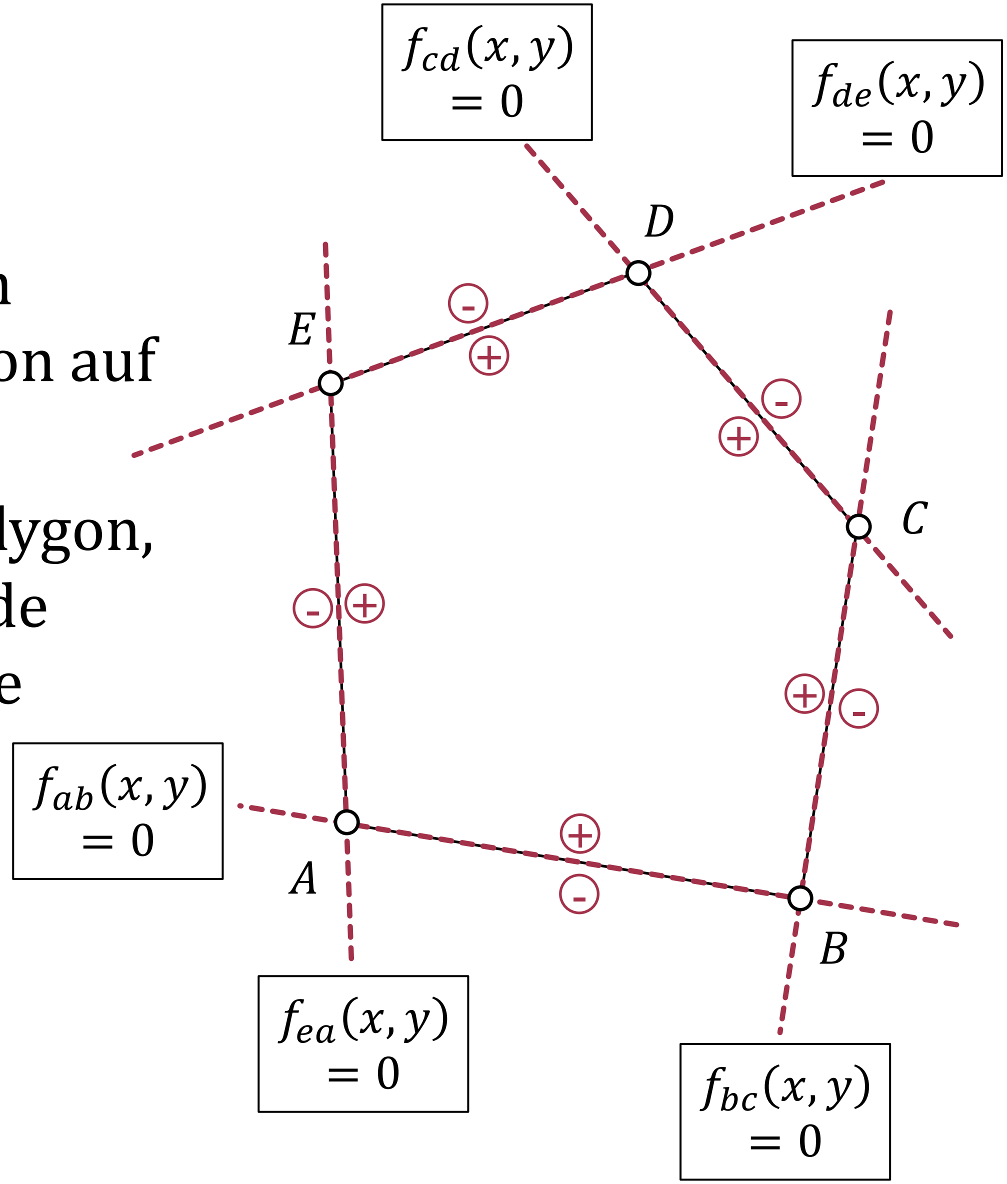
Koncav



➢ Mindestens eine Verbindungslinie nicht innerhalb des Polygons

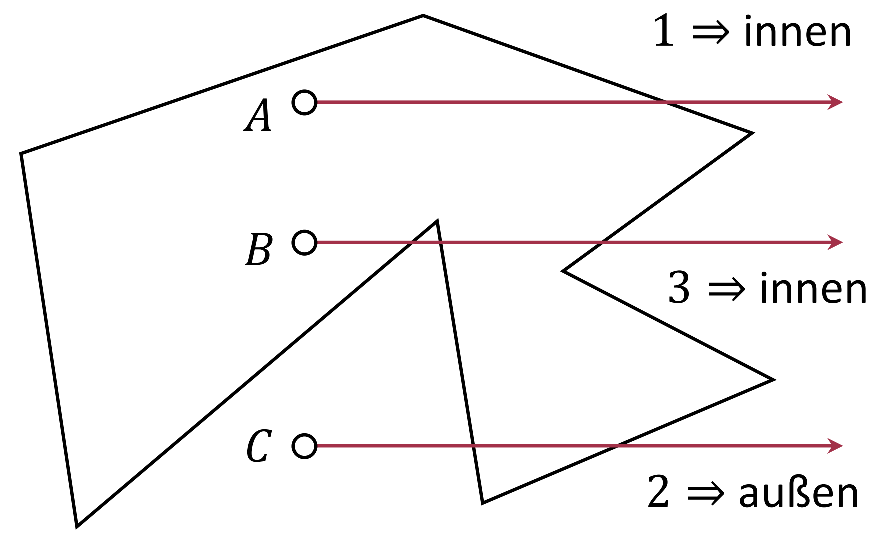
Punkt in konvexem 2D Polygon

- Gegeben: Konvexes Polygon
- Punkte innerhalb?
- Lege implizite Geraden durch Kanten, sodass jeweils Polygon auf positiver Seite
- Dann: Punkt in konvexem Polygon, wenn in Bezug auf jede Gerade „Half Edge“ auf positiver Seite



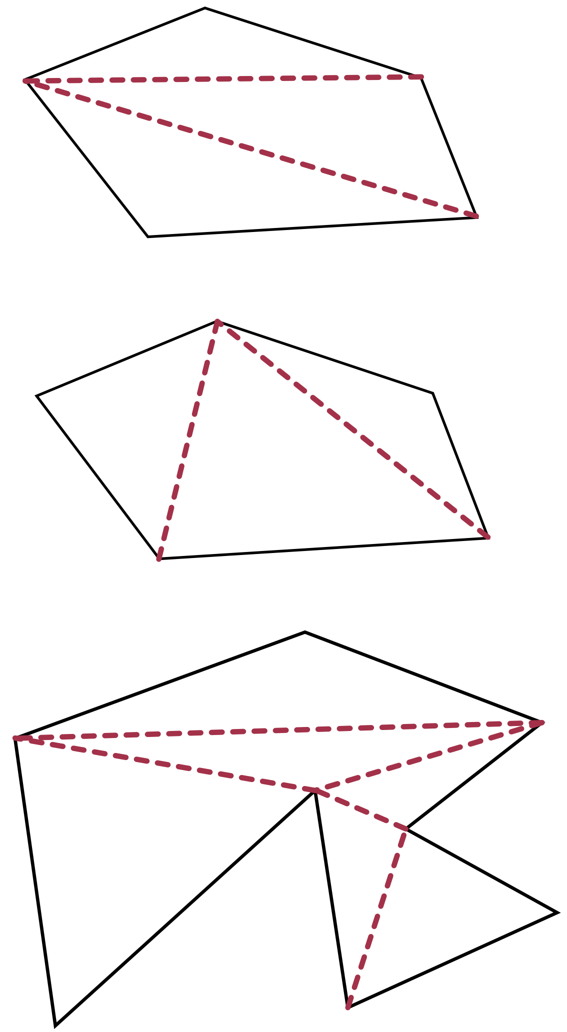
Punkt in 2D Polygon

- Gegeben: Polygon
- Punkte A, B und C innerhalb?
- Schieße Strahl nach rechts und berechne Schnittpunktzahl mit Kanten
  - Ungerade: Punkt innerhalb
  - Gerade: Punkt außerhalb
- Funktioniert mit beliebigen Polygonen



Dreieck vs. Polygon

- Dreieck ist…
  - Konvexes Polygon
  - Garantiert eben
- Eckpunkteigenschaften können linear und eindeutig interpoliert werden
- Jedes Polygon kann in Dreiecksnetz überführt werden…
- … Topologie ist allerdings nicht eindeutig

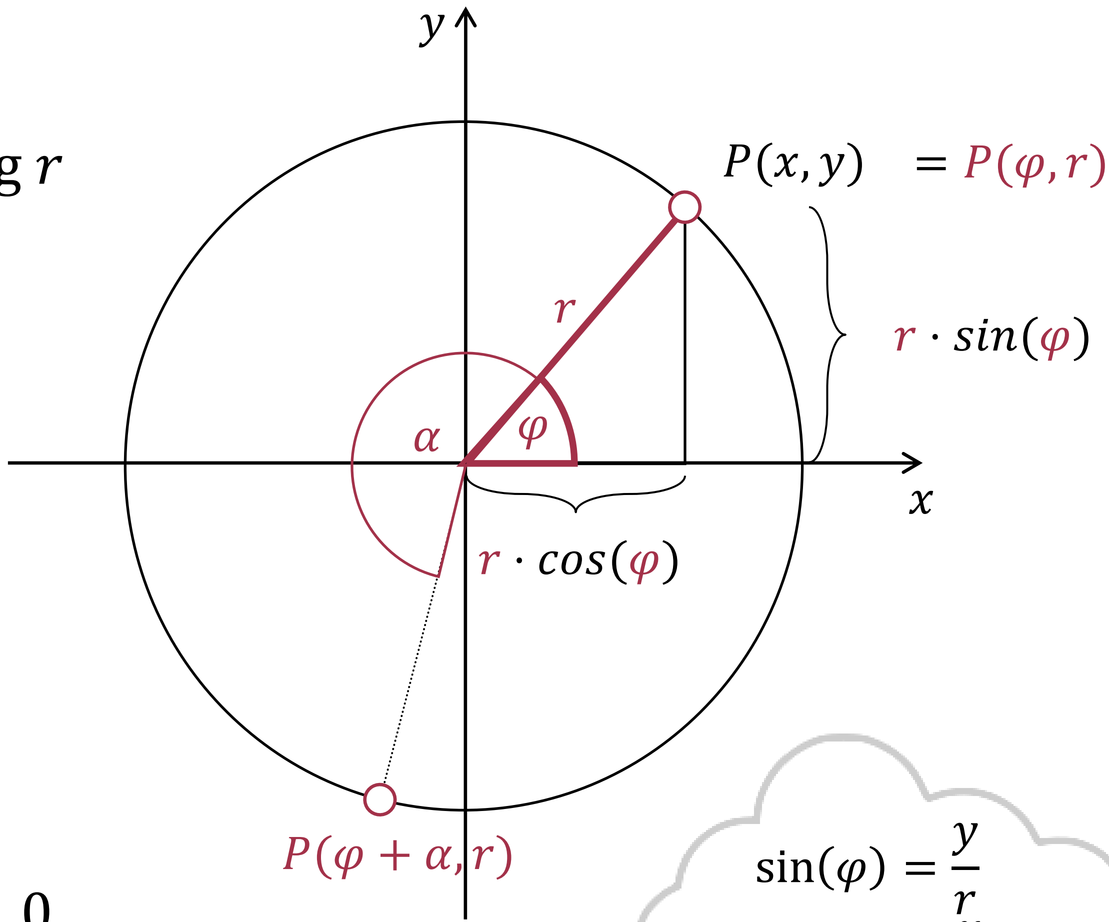


2.5

Krummlinige Koordinaten

Polarkoordinaten

- Definiert über:
  - Abstand zum Ursprung r
  - Winkel φ
- Überführung in Kartesische K:
  - $x = r \cdot cos(\varphi)$
  - $y = r \cdot sin(\varphi)$
- Umgekehrt:
  - $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
  - $\varphi = \begin{cases} +\arccos\left(\frac{x}{r}\right), y \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{x}{r}\right), y < 0 \end{cases}$

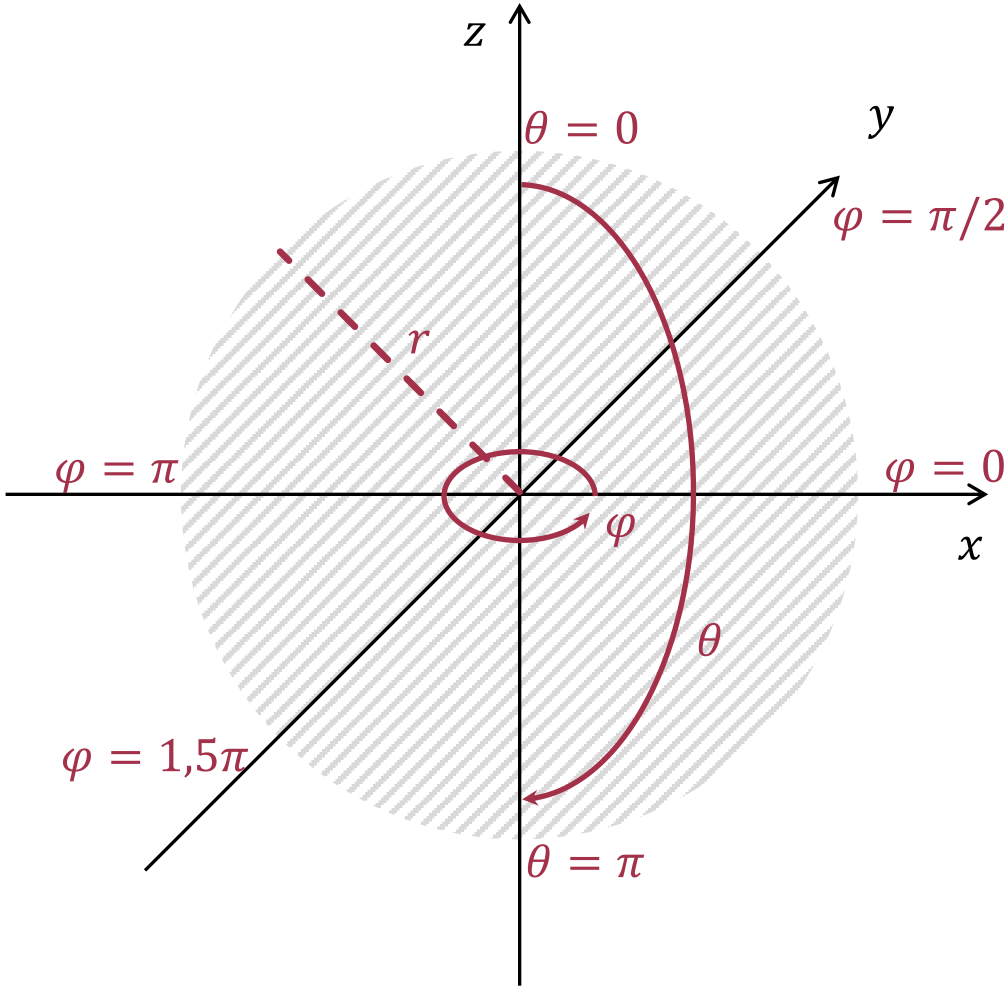


$$\sin(\varphi) = \frac{y}{r}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{x}{r}$$

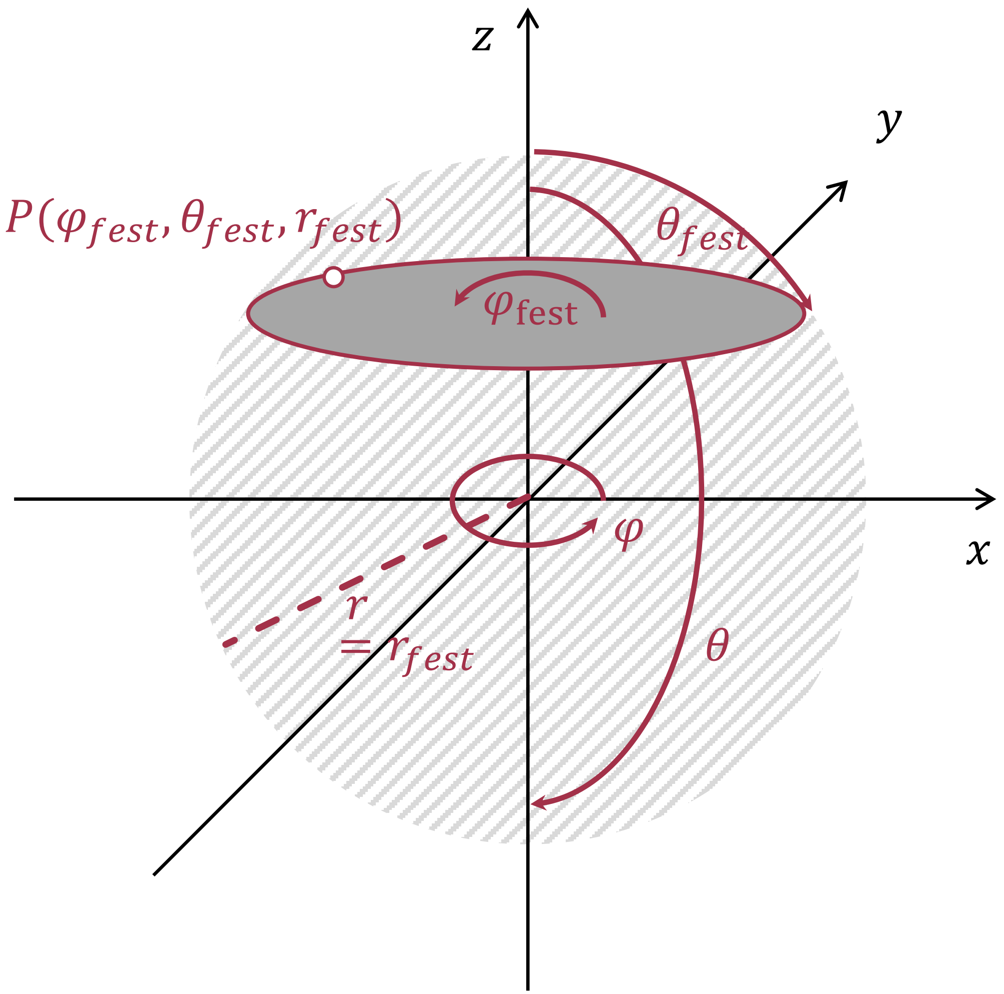
Kugelkoordinaten

- Definiert über zwei Winkel und Radius
- Abstand r zum Ursprung
- Winkel φ in der $xy-Ebene$
- Winkel θ zur z$-Achse$



Kugelkoordinaten II

- $r = R = \text{konstant}$:
  - Oberfläche der Kugel mit Radius R
- r und θ konstant:
  - Rand einer Kreisscheibe parallel zur $xy - Ebene$
- r, φ und θ konstant:
  - Punkt auf Kugeloberfläche
- Kugel:
  - $r \leq Kugelradius$
  - φ und θ frei



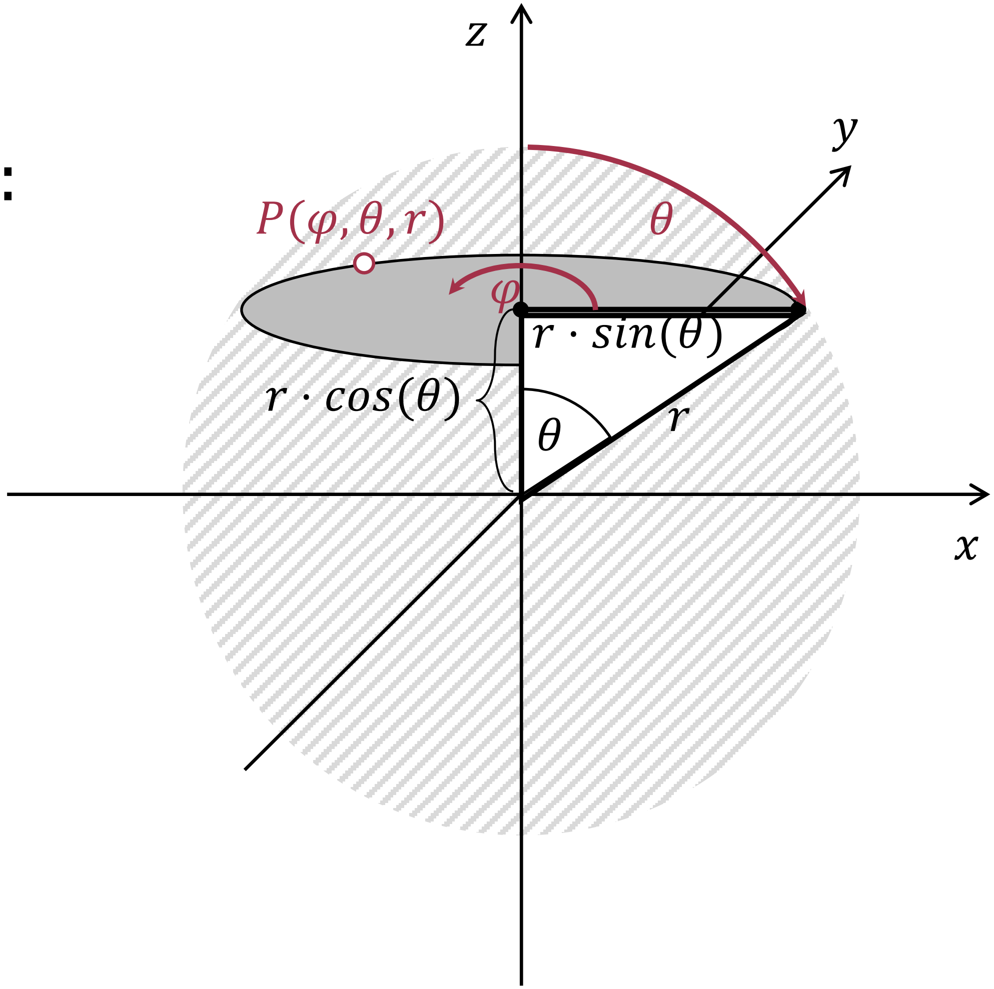
Kugelkoordinaten III

- Überführung in Kartesische Koordinaten:

$$x = r \cdot sin(\theta) \cdot cos(\varphi)$$

$$y = r \cdot sin(\theta) \cdot sin(\varphi)$$

$$z = r \cdot cos(\theta)$$



2.6

Matrizenrechnung

Matrix aus Zahlen

- $m \times n$ Matrix ist rechteckiges Zahlenschema mit $m \cdot n$ Elementen
- Hinweise:
  - Spaltenvektor $\sim m \times 1$ Matrix
  - Zeilenvektor $\sim 1 \times n$ Matrix
- Dann besteht Matrix aus:
  - n Spaltenvektoren, bzw.:
  - m Zeilenvektoren
- Geeignet einige Berechnungen elegant darzustellen

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$a_{m,n}, bzw.: \ a_{zeile,spalte}$$

Matrizenmultiplikation

- Möglich, wenn Spaltenzahl der linken mit Zeilenzahl der rechten Matrix identisch
- Dann ist $l \times n$ Matrix C Produkt aus $l \times m$ Matrix A und $m \times n$ Matrix B.
- Ihre Komponenten sind:

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot b_{kj}}$$

- Assoziativ- und Distributivgesetz gelten
- Kommutativgesetz nicht

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{|c|c|} \hline c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ \hline c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \\ \hline \end{array} \right)$$

Transponierte- und Einheitsmatrix

- Transponierte Matrix $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$ entsteht aus Matrix $\boldsymbol{A}$, indem alle Zeilenvektoren als Spaltenvektoren hingeschrieben werden:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \end{pmatrix}$$

- Einheitsmatrix ist neutrales Element bez. Matrix-multiplikation. Diagonalelemente sind 1 andere 0.

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inverse Matrix & Determinante

- Gegeben: Quadratische Matrix A mit $\det(A) \neq 0$
- Gesucht: Inverse Matrix A^{-1}, mit:
  - $A \cdot A^{-1} = E = A^{-1} \cdot A$
- Determinante $det(\boldsymbol{A})$ oder $|\boldsymbol{A}|$ determiniert, ob $\boldsymbol{A}$ invertierbar ist.

Anwendungsbeispiel

- Typisch: Gegeben Vektor $\boldsymbol{u}$ und Matrix $\boldsymbol{M}$
  - Manipuliere $\boldsymbol{u}$ mit $\boldsymbol{M}$, um $\boldsymbol{v}$ zu erhalten
  - Dazu: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{u}$
  - Beispiel: „Verschiebe $\boldsymbol{u}$ mit $\boldsymbol{M}$ nach $\boldsymbol{v}$ “
- Manchmal auch umgekehrte Richtung gesucht
  - Bekannt: $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{M}$
  - „Woher kommt $\boldsymbol{v}$“
  - $\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$
  - $\boldsymbol{M}^{-1} \cdot \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{M}^{-1} \cdot \boldsymbol{v}$
  - $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{M}^{-1} \cdot \boldsymbol{v}$
  - $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{M}^{-1} \cdot \boldsymbol{v}$

Berechnung der Determinanten

- Aufwändig: $n!$ Summanden
- Beispiele:

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{matrix} +a_{11} \cdot a_{22} \\ -a_{12} \cdot a_{21} \end{matrix}$

- $\begin{array}{ccccc} + & + & + & - & - & - \\ \multicolumn{6}{c}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}} \end{array} = \begin{matrix} +a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \\ +a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \\ +a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \\ -a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{13} \\ -a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \\ -a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \end{matrix}$

Adjunkte A_{ik}

- $A_{ik} \coloneqq (-1)^{i+k} \cdot Unterdeterminate\ bzgl.\ i,k$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A_{23}} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

- Mit Entwicklung über Zeile i lässt sich die Determinante berechnen über:

$$det(\boldsymbol{A}) = \sum_{k=1}^{4} a_{ik} \cdot A_{ik}$$

Berechnung der inversen Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{pmatrix}$$